Numerical Analysis — التحليل العددي

Definition : تعريف

1- The study of approximation techniques for solving mathematical proplems taking into account the extent of possible errors

دراسة الطرق التقريبية المستخدمة في حل المسائل الرياضية مع الاخذ بنظر الاعتبار قيمة الاخطاء المحتملة في الحل

2. A branch of mathematics concerned with methods usually iterative (rather than analytic) for obtaining solutions to problems by means of a Computer.

هو احد فروع الرياضيات و الذي يهتم بدراسة الطرق الرياضية لحل المسائل باستخدام الحاسوب وعادة ما تكون هذه الطرق تعاقبية « اي تعتمد على عمليات تكرارية لتحسين الحل » وليست تحليلية.

poblem → Numerical Technique → Approximate Solution

∴ القيمة الفعلية = القيمة التقريبية + الخطأ (error)

او

مقدار الخطأ = القيمة الفعلية - القيمة التقريبية

اذا كانت x هي القيمة الفعلية و x' هو القيمة التقريبية
فان الخطأ e هو :

$$e = x - x'$$

تعريف :
الخطأ النسبي Relative Error (re)
يعطى بالعلاقة الآتية :

$$re = \frac{e}{x} = \frac{\text{مقدار الخطأ}}{\text{القيمة الفعلية}}$$

$$\approx \frac{e}{x'}$$

« في الحالة العامة حيث تكون القيمة الفعلية غير معروفة تستبدل بالقيمة التقريبية »

مصادر الخطأ :
مثال : حول الكسر العشري 1/3 الى كسر ثنائي

$$1/3 = 0.01010101\ldots$$

« يتولد لدينا تمثيل غير منتهي متكرر »
∴ احد مصادر الخطأ في الحاسوب هو التحويل او التحويل المعاكس للرموز العشرية المناسبة للمدخلات والمخرجات و للرموز الثنائية باعتبارها الوسط المفضل للفاعلية الداخلية للآلة .

لايضاح هذا الامر في حالة عملية الجمع

$$0.6 + 0.6 = 1.2$$

نحول اولاً العدد 0.6 الى النظام الثنائي :

ان الرمز الثنائي للعدد 0.6 هو :

0.10011001/001 اثبت ذلك

وكما يتبين فهو غير منتهي

نفرض اننا قد حددنا بثمانية ارقام ثنائية في تمثيلنا للاعداد حينها ستكون عملية الجمع كالاتي

$$\begin{array}{r} 0.1001/1001 \\ +\ 0.1001/1001 \\ \hline 1.0011001 \end{array}$$

وبالرجوع للنظام العشري نحصل الى النتيجة :

$1.0011001 = 1.195$

مقربة الى ثلاث خانات بعد الفارزة

$\therefore$ الخطأ المطلق $= 1.2 - 1.195$

$= 0.005$

يعزى هذا الخطأ الى عمليات التدوير التي جرت اثناء مختلف التحويلات Rounding

ملاحظة : تتمكن الحاسبة الفعلية من استيعاب اكثر من ثمانية ارقام ثنائية وبذا يكون الخطأ اقل لكنه يبقى موجوداً.

ما هو التدوير Rounding ؟

نقول انه جرى تدوير العدد 0.16204 الى اربع خانات عشرية عندما تختزله الى الشكل 0.1620 بينما يدور العدد 0.16206 الى 0.1621 في كلتا الحالتين لايتجاوز الخطأ الناجم عن التدوير 0.00005 . تقابل الحالة الاولى التدوير الى الاسفل

في حين تناظر الحالة الثانية التدوير الى الاعلى .

الحالة العدية 0.16205 غالباً ما تدور الى اقرب رقم زوجي وفي هذه الحالة 0.1620

اما اذا كان العدد 0.16215 فيدور الى 0.1622

تتحقق عملية التدوير الى n خانة باضافة الرقم 5 الى الخانة n+1 واهمال كل الخانات التالية للخانة n بعد ذلك . « نظام عشري »

في حالة التمثيلات الثنائية لابد من اضافة الرقم 1 الى الخانة n+1 واسقاط الخانات التالية للخانة n بعد ذلك .

ماهو الفرق بين التدوير والقطع ؟ Chopping

نستطيع تدوير العدد الثنائي 0.10101 الى اربع خانات باضافة 1 الى الخانة الخامسة والغاء اربع خانات بعد ذلك والنتيجة تكون : 0.1011

ويمكننا بالمثل تدوير العدد 0.10100 الى 0.1010

اما في حالة القطع فنحصل ببساطة كل الخانات غير المرغوبة وهكذا يصبح العددان الثنائيان 0.10100 و 0.10101 كلاهما 0.1010 بعد القطع الى اربع خانات

تراكم الاخطاء عبر العمليات الحسابية الاربعة :

a- الاخطاء المطلقة

1 الجمع : نفرض ان x' و y' هي القيمة التقريبية للاعداد الفعلية x و y

$$\therefore \quad e_x = x - x'$$
$$e_y = y - y'$$

ما مقدار الخطأ المطلق الناتج في المقدار $(x+y)$

$$x+y = x' + e_x + y' + e_y$$
$$= x' + y' + e_x + e_y$$

$$\therefore \quad (x+y) - (x'+y') = e_x + e_y$$

$$\therefore \quad e_{x+y} = e_x + e_y$$

2 الطرح : واجب بيتي

3 الضرب : $e_{x.y}$?

$$x \cdot y = (x' + e_x) \cdot (y' + e_y)$$
$$= x' \cdot y' + x' \cdot e_y + y' \cdot e_x + e_x \cdot e_y$$

$e_x . e_y$ يهمل لماذا ؟

$$\therefore \quad x \cdot y - x' y' = x' e_y + y' e_x$$

$$\therefore \quad e_{x.y} = x' e_y + y' e_x$$

٤) القسمة   واجب بيتي:

ط- الأخطار النسبية:

١) الجمع:

$$r.e_{x+y} = \frac{e_{x+y}}{x' + y'}$$

$$= \frac{e_x + e_y}{x' + y'}$$

$$= \frac{e_x}{x'+y'} + \frac{e_y}{x'+y'}$$

$$= \frac{e_x}{x'} \left(\frac{x'}{x'+y'} \right) + \frac{e_y}{y'} \left(\frac{y'}{x'+y'} \right)$$

$$= re_x \, [R_x] + re_y \, [R_y]$$

R_x ، R_y هي نسبة x' ، y' الى المجموع على التوالي.

٢) الطرح: واجب بيتي.

٣) الضرب:

$$re_{xy} = \frac{e_{xy}}{x' . y'}$$

$$= \frac{x' e_y + y' e_x}{x' . y'} = \frac{x' e_y}{x' . y'} + \frac{y' e_x}{x' . y'}$$

$$= \frac{e_y}{y'} + \frac{e_x}{x'}$$

$$re_{x.y} = re_x + re_y$$

٤) القسمة: واجب بيتي.

تراكم الاخطاء في عملية القسمة

① الخطأ المطلق

$$e_{x/y} = \frac{x}{y} - \frac{x'}{y'}$$

$$= \frac{x'+e_x}{y'+e_y} - \frac{x'}{y'} = \frac{y'(x'+e_x) - x'(y'+e_y)}{y'(y'+e_y)}$$

$$= \frac{y'x' + y'e_x - x'y' - x'e_y}{y'^2\left(1+\frac{e_y}{y'}\right)}$$

$$= \frac{y'e_x - x'e_y}{y'^2\left(1+\frac{e_y}{y'}\right)} = \frac{\frac{1}{y'^2}(y'e_x - x'e_y)}{\left(1+\frac{e_y}{y'}\right)}$$

$$= \frac{\frac{x'}{y'}\left(\frac{e_x}{x'} - \frac{e_y}{y'}\right)}{\left(1+\frac{e_y}{y'}\right)}$$

$$\approx \frac{x'}{y'}\left(re_x - re_y\right)$$

② الخطأ النسبي

$$re_{x/y} = \frac{e_{x/y}}{x'/y'}$$

$$= \frac{\frac{x'}{y'}\left(re_x - re_y\right)}{\frac{x'}{y'}}$$

$$= re_x - re_y$$